MATEMÁTICAS. Primer parcial (Enero de 2004)

Nombre: **Titulación y grupo:**

1. [1.5] (a) Resuelva la desigualdad $|x-1|-|x-3| \geq 5$.

   (b) La función f_n se define por $f_0(x) = 1/(2-x)$ y $f_{n+1}(x) = (f_0 \circ f_n)(x)$, $n = 0, 1, \ldots$ (donde $\circ$ representa la composición). Demuestre que $f_n(x) = \dfrac{(n+1)-nx}{(n+2)-(n+1)x}$.

2. [1.5] (a) Es conocido que los puntos de una superficie esférica se pueden caracterizar mediante: "son los puntos de $\mathbb{R}^3$ que se encuentran a una distancia fija r (denominada radio) de un punto fijo P (denominado centro)". Utilice dicha caracterización para obtener la ecuación general de la superficie esférica E que está centrada en el punto $P = (1, 2, 3)$ y tiene de radio $r = \sqrt{2}$.

   (b) Obtenga la ecuación general del plano Π que es paralelo al plano coordenado xy y pasa por el punto $Q = (-1, -3, 4)$.

   (c) Calcule la ecuación de la curva intersección de E y Π y descríbala.

3. [2] (a) Resuelva, según los valores del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$, el sistema lineal

$$\left.\begin{array}{rcl} 5x+2y+z &=& \lambda x \\ 2x+y &=& \lambda y \\ x+z &=& \lambda z \end{array}\right\}.$$

   (b) Realice una representación gráfica de los resultados obtenidos en (a).

4. [1.5] (a) Sean A y B dos matrices cuadradas de orden 3 tales que $|A| = 3$ y $|B| = -4$. En los casos en que sea posible, calcule: $|AB|$, $3|A|$, $|-2B|$, $|A^{-1}|$, $|A+B|$, $|A|+|B|$ y $|B^t|$.

   (b) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, calcule la matriz $(AA^t)^{-1}$ y compruebe que es simétrica. Razone si dicha simetría ocurre para cualquier matriz A.

5. [2] (a) Calcule y represente gráficamente el dominio de la función —vectorial—

$$f(x,y) = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{y-x^2}, \frac{\ln y}{yx-1}, \frac{1-x^{1/3}}{\sqrt{x}} \right).$$

   (b) Demuestre que la ecuación $e^{-x^2} = x^3$ posee al menos una solución real en el intervalo $[0,1]$. Proporcione, aplicando dos veces el método de bisección, un valor aproximado a dicha solución y calcule el número de veces que sería necesario aplicar dicho método para que el valor aproximado obtenido se diferenciase del valor real en menos de una diezmilésima.

6. [1.5] Estudie la continuidad de la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2(y+2)}{(y+2)^2+x^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,-2) \\ \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,-2) \end{cases}$$

   (**Nota:** para la existencia de los límites se recomienda utilizar trayectorias no rectilíneas).

Puntuación de las preguntas: Se indica al inicio de cada una de ellas.
Tiempo: 3 horas.

Almería, 10 de enero de 2003