
MATEMÁTICAS. AGRONOMÍA. Diciembre 2014**Apellidos y nombre:****DNI:****Grupo:** Mañana ☐ Tarde ☐

1. a) [0.5] Calcule la parte real y parte imaginaria del número complejo $z = \frac{3i^{30} - i^{19}}{2i - 1}$.
- b) [0.5] Calcule la solución de la ecuación $z^2 + (2i - 3)z + 5 - i = 0$.
2. [1.5] Estudie el carácter en función del parámetro m y obtenga la solución en el caso de que exista:

$$\left. \begin{array}{rcl} x + 2y - z & = & 4 \\ 3x - y + z & = & 9 \\ 4x + y + mz & = & 13 \end{array} \right\}$$

3. [1] Obtenga la ecuación vectorial y reducidas de la recta que es perpendicular a los vectores $(1, 1, 2)$ y $(0, 1, 3)$ y pasa por el punto $(1, 2, 3)$.
4. [1] Una matriz A verifica la ecuación matricial $A^{21} + 2A^{20} - I_2 = 0_2$, y se conoce $A^{20} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calcule A .
5. [1.25] Dada la función $f(x) = x - 2x|x|$. Estudie la monotonía, curvatura, y obtenga los extremos relativos, absolutos y puntos de inflexión.
6. [1.5] Estudie la continuidad de $f(x)$ y $f'(x)$, y diga qué tipo de discontinuidades presentan:

$$f(x) = \begin{cases} \tan x & \text{si } x \leq 0, \\ x \ln x & \text{si } 0 < x < e, \\ 2x - e & \text{si } e \leq x. \end{cases}$$

7. [1.25] Calcule la ecuación del plano tangente a la gráfica de la función $z = f(x, y)$ cuya expresión está dada en forma implícita $e^x \tan(y + z) = 1$. Dibuje el plano indicando los puntos de corte con los ejes coordenados. En el punto $(0, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4})$

8. a) [0.75] Calcule $\int_0^1 x^5 \sqrt{1 - x^3} dx$.

- b) [0.75] Calcule $\int_1^2 \int_{x-1}^1 \frac{\tan y}{y} dy dx$. Si le resulta complicada puede probar a cambiar el orden de la integración.

Tiempo: 3h. La puntuación figura al inicio de cada pregunta. Todos los cálculos deben figurar en las hojas entregadas.

Almería, 12 de diciembre de 2014

1) a)
$$\frac{3i^{30} - i^{19}}{2i - 1} = \frac{3(-1) - (-i)}{2i - 1} = \frac{-3 + i}{2i - 1} = \frac{(-3+i)(2i+1)}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{3+6i-i-2i^2}{1-4i^2} =$$

$$\left. \begin{array}{l} i^{30} = -1 \\ i^{19} = -i \end{array} \right\} \begin{array}{l} i^0 = 1 \quad 30 \div 4 \\ i^1 = i \quad 2 \\ i^2 = -1 \quad 19 \div 4 \\ i^3 = -i \quad 3 \end{array}$$

$$= \frac{5+5i}{5} = 1+i$$

b)
$$z^2 + (2i-3)z + 5-i = 0$$

$$z = \frac{(3-2i) \pm \sqrt{(2i-3)^2 - 4(5-i)}}{2} = \frac{3-2i \pm \sqrt{-15-8i}}{2} = *$$

Calculamos $\sqrt{-15-8i} = w \Rightarrow w^2 = -15-8i = (a+bi)^2$

$$(a+bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -15 \\ 2ab = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab = -4 \\ a^2 - b^2 = 15 \end{cases}$$

entonces $b = \frac{-4}{a}$, $a^2 - \left(\frac{16}{a^2}\right) = 15 \Rightarrow a^4 - 16 = 15a^2$

$$a^4 - 15a^2 - 16 = 0$$

$$a^2 = \frac{15 \pm \sqrt{15^2 - 4 \cdot 16}}{2}$$

$$a^2 = -16, 1 \Rightarrow \text{como } a \in \mathbb{R}$$

entonces $a = \pm 1$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Si } a=1 \Rightarrow b=-4 \\ \text{Si } a=-1 \Rightarrow b=4 \end{array} \right\} \text{por tanto } w = \sqrt{-15-8i} = \pm(1-4i)$$

$$* = \frac{3-2i \pm (1-4i)}{2} \begin{cases} \nearrow 2-3i \\ \searrow 1+i \end{cases}$$



UNIVERSIDAD DE ALMERÍA

Facultad de: _____

Núm. _____

Grupo _____

Alumno _____

Asignatura _____

$$2) \begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ 3x - y + z = 9 \\ 4x + y + mz = 13 \end{cases}$$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & m \end{vmatrix} = -7m \Rightarrow \begin{matrix} m=0 \Rightarrow |A|=0 \\ m \neq 0 \Rightarrow |A| \neq 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{SCD} & \text{rg } A = 2, \text{rg}(A|b) = 3 \\ \text{SCD} & \text{rg } A = 3 = \text{rg}(A|b) \end{matrix} \quad \underline{\text{Sistema}}$$

a) Si $m \neq 0$ SCD, por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 9 & -1 & 1 \\ 13 & 1 & m \end{vmatrix}}{-7m} = \frac{-22m}{-7m} = \frac{22}{7}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 3 & 9 & 1 \\ 4 & 13 & m \end{vmatrix}}{-7m} = \frac{-3m}{-7m} = \frac{3}{7}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 9 \\ 4 & 1 & 13 \end{vmatrix}}{-7m} = 0$$

$$\text{Sol. } \left(\frac{22}{7}, \frac{3}{7}, 0 \right)$$

b) Si $m=0$ ~~pero~~ ^{Compatible Indeterminado} sistema ~~Incompatible~~ pues $\text{rg } A = 2$ y $\text{rg}(A|b) = 2$

$$\text{pues } \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & 9 \\ 1 & 0 & 13 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 9 \\ 4 & 1 & 13 \end{vmatrix} = 0$$

formamos las 2 primeras ec.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ 3x - y + z = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 4 + z \\ 3x - y = 9 - z \end{cases} \quad z = \lambda, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 6 = -7$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4+\lambda & 2 \\ 9-\lambda & -1 \end{vmatrix}}{-7} = \frac{22-\lambda}{7}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4+\lambda \\ 3 & 9-\lambda \end{vmatrix}}{-7} = \frac{3+4\lambda}{7}$$

$$\text{Sol} = \left\{ \left(\frac{22-\lambda}{7}, \frac{3+4\lambda}{7}, \lambda \right), \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Por Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 1 & 9 \\ 4 & 1 & m & 13 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -7 & 4 & -3 \\ 0 & -7 & m+4 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -7 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & m & 0 \end{array}\right)$$

a) Si $m \neq 0$ SCD

$$\begin{cases} z=0, & -7y=-3 \Rightarrow y=\frac{3}{7}, \\ x+2y-z=4 \Rightarrow x=\frac{22}{7} \end{cases} \quad \text{Sol } \left(\frac{22}{7}, \frac{3}{7}, 0\right)$$

b) Si $m=0$ SCI

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -7 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x+2y=4+z \\ -7y=-3-4z \end{cases}$$
$$z=\lambda, \quad y=\frac{3+4\lambda}{7}, \quad x=\frac{22-\lambda}{7}$$



Núm.

UNIVERSIDAD DE ALMERÍA

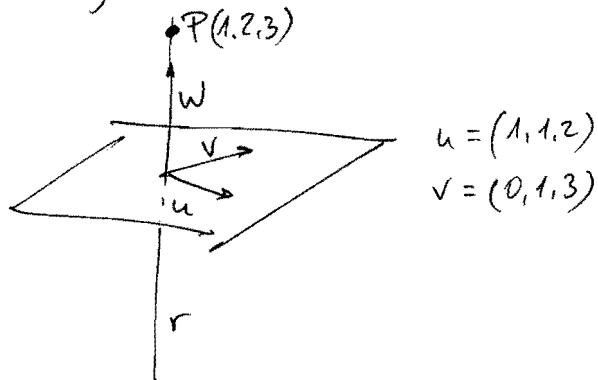
Facultad de:

Grupo

Alumno

Asignatura

3) Ec. vectorial y reducidas de la recta



$$u = (1, 1, 2)$$

$$v = (0, 1, 3)$$

$$w = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1, 3, -1) \rightarrow \text{Ec. vectorial}$$
$$(x, y, z) = (1, 2, 3) + \alpha(-1, 3, -1), \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\text{paramétricas: } \begin{cases} x = 1 - \alpha \\ y = 2 + 3\alpha \\ z = 3 - \alpha \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 - x \\ y = 2 + 3(1 - x) \\ z = 3 - (1 - x) \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} \text{reducidas} \\ y = 5 - 3x \\ z = 2 + x \end{matrix}}$$

4) Una matriz A verifica la ecuación $A^{21} + 2A^{20} - I_2 = O_2$
 y conocemos $A^{20} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calcule A .

Solución

$$A \cdot A^{20} + 2A^{20} = I_2$$

$$A^{20}(A + 2I) = I_2$$

$(A^{20})^{-1}$, calculemos la inversa de $A^{20} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{(A^{20})^{-1}}$

$$(A^{20})^{-1} = A + 2I \Rightarrow A = (A^{20})^{-1} - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}^A$$

8) Calcule la integral $\int_1^2 \int_{x-1}^1 \frac{\operatorname{tg} y}{y} dy dx$

~~y dibuje previamente~~

y dibuje en primer lugar el recinto donde se integra.



UNIVERSIDAD DE ALMERÍA

Facultad de: _____

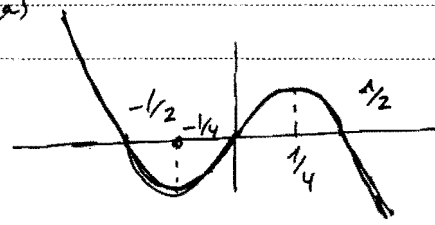
Grupo: _____

Alumno: _____

Asignatura: Las parábolas

5)

$$f(x) = x - 2|x| = \begin{cases} x - 2x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ x + 2x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

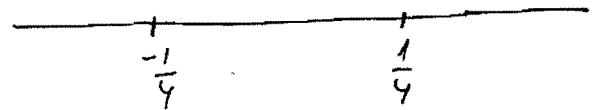


$$f'(x) = \begin{cases} 1 - 4x & \text{si } x \geq 0 \\ 1 + 4x & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 1 \quad \text{por tanto } f \text{ es derivable en } \mathbb{R}.$$

Monotonía

Veamos dónde crece y decrece la función:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{aligned} 1 - 4x &= 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4} \\ 1 + 4x &= 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} (-\infty, -\frac{1}{4}), f' < 0 \text{ decreciente} &\Rightarrow \text{En } x = -\frac{1}{4} \text{ mín. local} \\ (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}), f' > 0 \text{ creciente} &\Rightarrow \text{En } x = \frac{1}{4} \text{ max. local} \\ (\frac{1}{4}, \infty), f' < 0 \text{ decreciente} &\end{aligned}$$

Curvatura

$$f''(x) = \begin{cases} -4 & x > 0 \\ 4 & x < 0 \end{cases} \quad f''(0) \text{ no existe} \quad \begin{aligned} (-\infty, 0) f'' > 0 &\Rightarrow \cup \\ (0, \infty) f'' < 0 &\Rightarrow \cap \end{aligned}$$

No tiene PI pues cambia la curvatura en $x=0$ y $f''(0)$ no existe.

Extremos

$$\begin{aligned} f' = 0 &\Rightarrow x = \frac{1}{4} \text{ en } (0, \infty), f''(\frac{1}{4}) = -4 < 0 \Rightarrow \text{max. relativo } (\frac{1}{4}, f(\frac{1}{4})) \\ x = -\frac{1}{4} \text{ en } (-\infty, 0) &f''(-\frac{1}{4}) = 4 > 0 \Rightarrow \text{min. relativo } (-\frac{1}{4}, f(-\frac{1}{4})) \end{aligned}$$

pero no existen extremos absolutos pues

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$6) \quad f(x) = \begin{cases} \tan x & \text{si } x \leq 0 \\ x \ln x & \text{si } 0 < x < e \\ 2x - e & \text{si } e \leq x \end{cases}$$

f no es cont. en $x = -(2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{N}$

es decir, en $-\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}, \dots$

$$\text{En } x=0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x = 0$$

$\Rightarrow f$ es cont. en $x=0$

Además es cont. en $(0, e), (e, \infty)$

$$\text{En } x=e \quad \lim_{x \rightarrow e^\pm} f = e$$

por tanto f es cont. en $\mathbb{R} - \{-(2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{N}\}$

Las discontinuidades son de salto infinito pues son las de la $\tan x$ esencial.

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + \tan^2 x & \text{si } x < 0 \\ 1 + \ln x & \text{si } 0 < x < e \\ 2 & \text{si } e \leq x \end{cases}$$

f no es derivable donde f no es cont. en $\mathbb{R} - \{-(2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{N}\}$
y además: veamos si es derivable en $x=0, e$

$$\text{En } x=0 \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 + \ln x = -\infty$$

$\Rightarrow \nexists f'(0)$, la discont. es esencial en $x=0$

$$\text{En } x=e \quad \lim_{x \rightarrow e^\pm} f'(x) = 2 \Rightarrow \exists f'(e)$$

$$\text{por tanto } f'(x) = \begin{cases} 1 + \tan^2 x & \text{si } x < 0 & \Rightarrow \nexists f'(0) \\ 1 + \ln x & \text{si } 0 < x < e & \Rightarrow \exists f'(e) \\ 2 & \text{si } e \leq x \end{cases}$$



UNIVERSIDAD DE ALMERÍA

Facultad de: _____

Núm. _____

Grupo _____

Alumno _____

Asignatura _____

$$7) e^x \operatorname{tg}(y+z) = 1 \quad P(0, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}) \Rightarrow F(x, y, z) = e^x \operatorname{tg}(y+z) - 1$$

$$\text{Ec. del plano } \operatorname{tg} \quad z - z_0 = f_x \cdot (x - x_0) + f_y \cdot (y - y_0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-F_x}{F_z} = \frac{-e^x \operatorname{tg}(y+z)}{e^x(1+\operatorname{tg}^2(y+z))} = \frac{-\operatorname{tg}(y+z)}{1+\operatorname{tg}^2(y+z)} = \frac{-\frac{1}{e^x}}{1+(\frac{1}{e^x})^2} = \frac{-e^x}{1+e^{2x}}$$

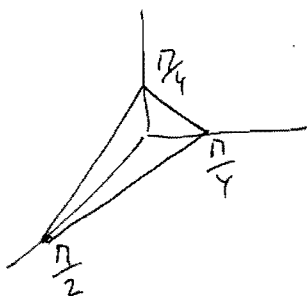
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-F_y}{F_z} = \frac{-e^x(1+\operatorname{tg}^2(y+z))}{e^x(1+\operatorname{tg}^2(y+z))} = -1$$

$$f_x(0, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{2}$$

$$\text{La ec. del plano es} \quad z + \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2}(x-0) + (-1)(y-\frac{\pi}{2})$$

$$z + \frac{\pi}{4} = -\frac{x}{2} - y + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} + y + z = \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{x}{\pi/2} + \frac{y}{\pi/4} + \frac{z}{\pi/4} = 1$$





$$8) a) \int_0^1 x^5 \sqrt{1-x^3} dx$$

$$t = \sqrt{1-x^3} \Rightarrow \begin{matrix} x=0 \Rightarrow t=1 \\ x=1 \Rightarrow t=0 \end{matrix}$$

$$t^2 = 1-x^3 \rightarrow 2t dt = -3x^2 dx$$

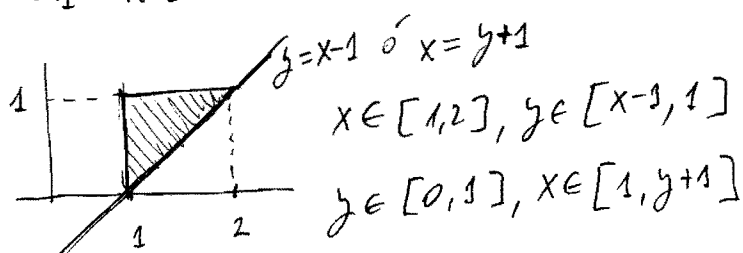
$$x^3 = 1-t^2 \xrightarrow{\text{multiplicamos}} 2t(1-t^2) dt = -3x^2 \cdot x^3 dx$$

$$\underbrace{-\frac{2}{3} t(1-t^2) dt}_{a} = x^5 dx, \text{ entonces}$$

$$\int_0^1 \underbrace{\sqrt{1-x^3}}_t \cdot \underbrace{x^5 dx}_a = -\frac{2}{3} \int_1^0 t \cdot t(1-t^2) dt = -\frac{2}{3} \int_1^0 t^2(1-t^2) dt =$$

$$= +\frac{2}{3} \int_0^1 t^2 - t^4 dt = \frac{2}{3} \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} \right)_0^1 = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{5-3}{15} = \frac{4}{45}$$

$$b) \int_1^2 \int_{x-1}^1 \frac{\operatorname{tg} y}{y} dy dx = \int_0^1 \int_1^{y+1} \frac{\operatorname{tg} y}{y} dx dy = \int_0^1 \frac{\operatorname{tg} y}{y} (y+1-1) dy$$



$$= \int_0^1 \operatorname{tg} y dy = \int_0^1 \frac{\operatorname{sen} y}{\cos y} dy = - \int_0^1 \frac{-\operatorname{sen} y}{\cos y} dy = - \ln |\cos y| \Big|_0^1 =$$

$$= - (\ln(\cos 1) - \ln(\cos 0)) = - \ln(\cos 1)$$