
Matemáticas Agronomía. Examen Segundo parcial 2015-2016

Apellidos: _____ Nombre: _____

Mañana: ☐ Tarde ☐

1. [2] Calcule el área limitada por las curvas $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{x}{1+x^2}$ en el intervalo $[1, +\infty)$.
2. [2] Represente gráficamente el recinto:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

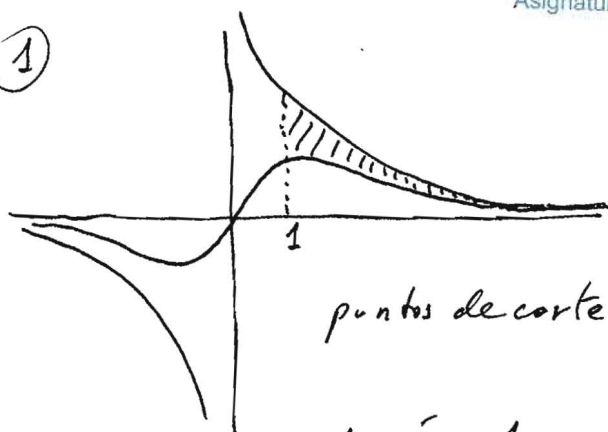
Calcule la integral doble de $f(x, y) = x^2 + y^2$ en A .

3.
 - a) [2] Calcule el vector tangente unitario y el vector normal principal de la curva C parametrizada por $r(t) = (t, \cos 3t, -\sin 3t)$ en $t = \pi/3$.
 - b) [0.5] Obtenga la ecuación del plano osculador en el punto P de la curva C obtenido con $t = \pi/3$ utilizando los dos vectores calculados en el apartado anterior.
4. Sea el campo vectorial $F(x, y, z) = (x, y, z)$ y la superficie S que es la gráfica de la función $z = 1 - x^2 - y^2$ definida en el círculo de centro $(0, 0)$ y radio 1 orientada hacia arriba.
 - a) [0.25] Obtenga una parametrización de S .
 - b) [0.25] Calcule la expresión de los vectores normales a S .
 - c) [1.5] Calcule $\iint_S F \, ds$.
 - d) [0.25] Obtenga una parametrización del borde de S , es decir ∂S , orientada en sentido antihorario.
 - e) [1.25] Calcule $\int_{\partial S} F \, ds$. (Este apartado será mejor valorado si utilizas el teorema de Stokes).

Tiempo total: 2 horas.

Almería, 26 de enero de 2016

(1)



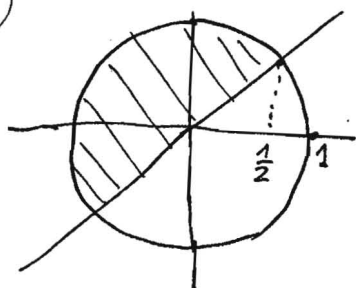
$$A = \int_1^{\infty} \left| \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} \right| dx$$

puntos de corte: $\frac{1}{x} = \frac{x}{1+x^2} \Rightarrow 1+x^2 = x^2 \Rightarrow$
no tiene puntos de corte

además $\frac{1}{x} > \frac{x}{1+x^2} \quad \forall x > 1$, entonces

$$\begin{aligned} A &= \int_1^{\infty} \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} dx = \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\ln x - \frac{1}{2} \ln |1+x^2| \right]_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln \frac{b}{\sqrt{1+b^2}} - \ln \frac{1}{\sqrt{2}} = \\ &= \ln \sqrt{2} = \frac{1}{2} \ln 2 \end{aligned}$$

(2)



$$\begin{aligned} \iint_A x^2 + y^2 dx dy &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \int_0^1 r^2 \cdot r dr d\theta = \\ A \quad \begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \\ r &\in [0, 1] \\ \theta &\in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right] \end{aligned} \end{aligned}$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{r^4}{4} d\theta = \frac{1}{4} \left(\frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{4}$$

③ $r(t) = (t, \cos 3t, -\sin 3t)$, $t = \frac{\pi}{3}$

a) $r'(t) = (1, -3\sin 3t, -3\cos 3t)$

$r'(\frac{\pi}{3}) = (1, -3\sin \pi, -3\cos \pi) = (1, 0, 3)$, $\|r'(\frac{\pi}{3})\| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$

vector tangente unitario: $T(\frac{\pi}{3}) = \frac{r'(\frac{\pi}{3})}{\|r'(\frac{\pi}{3})\|} = (\frac{1}{\sqrt{10}}, 0, \frac{3}{\sqrt{10}})$

vector normal principal $N(t) = \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|}$

$T(t) = \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|} = \frac{(1, -3\sin 3t, -3\cos 3t)}{\sqrt{1 + (-3\sin 3t)^2 + (-3\cos 3t)^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}(1, -3\sin 3t, -3\cos 3t)$

$T'(t) = \frac{1}{\sqrt{10}}(0, -9\cos 3t, 9\sin 3t) = \frac{9}{\sqrt{10}}(0, -\cos 3t, \sin 3t)$

~~no se usa~~ $T'(\frac{\pi}{3}) = \frac{9}{\sqrt{10}}(0, 1, 0)$, $\|T'(\frac{\pi}{3})\| = \frac{9}{\sqrt{10}}$

entonces $N(\frac{\pi}{3}) = \frac{T'(\frac{\pi}{3})}{\|T'(\frac{\pi}{3})\|} = (0, 1, 0)$

b) Plano osculador está generado por $\{T(\frac{\pi}{3}), N(\frac{\pi}{3})\}$
y conocemos el punto que es $r(\frac{\pi}{3}) = (\frac{\pi}{3}, \cos \frac{\pi}{3}, -\sin \frac{\pi}{3}) =$
 $= (\frac{\pi}{3}, -1, 0)$

por tanto la ec. del plano es:

$(x, y, z) = (\frac{\pi}{3}, -1, 0) + \alpha (\frac{1}{\sqrt{10}}, 0, \frac{3}{\sqrt{10}}) + \beta (0, 1, 0)$

o la ec. general:

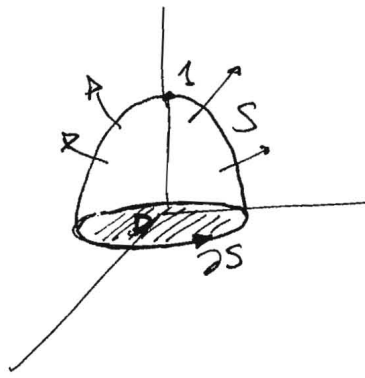
$\begin{vmatrix} x - \frac{\pi}{3} & \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 \\ y + 1 & 0 & 1 \\ z & \frac{3}{\sqrt{10}} & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x - z = \pi$

④

$$F(x, y, z) = (x, y, z),$$

$$z = 1 - x^2 - y^2$$

$$\text{Dom } S = D(0, 0, 1) = D$$



a) $S(x, y) = (x, y, 1 - x^2 - y^2)$, $(x, y) \in D$.

b) $N(x, y) = (-z_x, -z_y, 1) = (2x, 2y, 1)$

c) $\iint_S F \, ds = \iint_{\text{Dom } S = D} F(S(x, y)) \cdot N(x, y) \, dx \, dy =$

$$= \iint_D (x, y, 1 - x^2 - y^2) \cdot (2x, 2y, 1) \, dx \, dy = \iint_D x^2 + y^2 + 1 \, dx \, dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^2 + 1) \cdot r \, dr \, d\theta = 2\pi \int_0^1 r^3 + r \, dr$$

$$= 2\pi \left(\frac{r^4}{4} + \frac{r^2}{2} \right)_0^1 = 2\pi \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) = \frac{3\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \\ r &\in [0, 1] \\ \theta &\in [0, 2\pi] \end{aligned}$$

d) ∂S es la circunferencia de centro $(0, 0)$ y $r = 1$ entonces
 $r(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$, $\theta \in [0, 2\pi]$

e) $\int_{\partial S} F \, dr = \iint_S \text{rot } F \, ds = \iint_S 0 \, ds = 0$

$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$$

La otra forma de hacerlo es sin aplicar T-Stokes:

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} F \, dr &= \int_0^{2\pi} F(r(t)) r'(t) \, dt = \int_0^{2\pi} (\cos t, \sin t, 0) (-\sin t, \cos t, 0) \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} 0 \, dt = 0 \end{aligned}$$