Matemáticas Agronomía. 1er parcial noviembre 2016

Apellidos:________________________ **Nombre:**________________________

Mañana: ☐ **Tarde** ☐

1. **[2]** Discuta el carácter del siguiente sistema según los valores de los parámetros a y b, y resuélvalo en el caso compatible:

$$\left.\begin{array}{r} x+y=a \\ x+by=0 \end{array}\right\}$$

2. **[2]** Determine el siguiente conjunto $A=\{x\in\mathbb{R}: |\ |x+1|-|x-1|\ |<1\}$. Calcule su supremo, ínfimo, máximo y mínimo.

3. **[2]** Calcule todos los números complejos cuyo cuadrado coincide con su conjugado.

4. *a*) **[0.75]** Estudie la continuidad de la función

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{e^{xy}-1}{xy} & \text{si } xy\neq 0 \\ 1 & \text{si } xy=0 \end{cases}$$

   b) **[1.25]** Halle las derivadas parciales de $f(x,y)$. **Nota:** Tendrá que distinguir los casos (a,b),$(a,0)$,$(0,b)$ y $(0,0)$ con $a,b\neq 0$.

5. *a*) **[0.5]** Deduzca a partir de las coordenadas polares de un punto de $\mathbb{R}^2$ cuáles son las coordenadas cilíndricas de un punto de $\mathbb{R}^3$.

   b) **[0.75]** Encuentre la ecuación del plano tangente a la esfera centrada en el origen y radio 5 en el punto $(0,4,3)$.

   c) **[0.75]** Encuentre una parametrización de la curva intersección de la superficie de ecuación $y=x^2$ con el elipsoide $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+z^2=1$.

Tiempo total: 2 horas.

Almería, 30 de noviembre de 2016

UNIVERSIDAD DE ALMERÍA

Facultad de: ______

Núm. ______

Grupo ______

Alumno ______

Asignatura ______

① $\left.\begin{array}{l} x+y=a \\ x+by=0 \end{array}\right\}$ $(A|B)=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 1 & b & 0 \end{array}\right) \underset{F_2-F_1\to F_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & b-1 & -a \end{array}\right)$

- Si $b\neq 1 \to rg A = 2 = rg(A|B) \Rightarrow$ sistema CD, $\forall a\in\mathbb{R}$
- Si $b=1 \to rg A = 1$, $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & -a \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } a=0,\ rg A = rg A|B = 1 & S.C.I \\ \text{Si } a\neq 0,\ rg A = 1,\ rg A|B = 2 & S.I \end{cases}$

Caso CD: $b\neq 1$, $\forall a\in\mathbb{R}$

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & b-1 & -a \end{array}\right) \Rightarrow y=\dfrac{-a}{b-1}$, $x+y=a \Rightarrow x=a-y=a-\dfrac{-a}{b-1}=\dfrac{ab}{b-1}$

$S=\left\{\left(\dfrac{ab}{b-1}, \dfrac{-a}{b-1}\right)\right\}$

Caso CI: $b=1$, $a=0$

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow x+y=0 \Rightarrow x=-y$, $S=\{(-\lambda,\lambda),\ \lambda\in\mathbb{R}\}$

② $A=\{x\in\mathbb{R}: \big||x+1|-|x-1|\big|<1\}$

$|(-x-1)-(-x+1)|$ | -1 | $|x+1-(-x+1)|$ | 1 | $|x+1-(x-1)|$

En $(-\infty,-1)$ se tiene $|-2|<1$, Falso $\Rightarrow$ no lo verifica ningún x

En $(-1,1)$ se tiene $|2x|<1 \Rightarrow -1<2x<1 \Rightarrow -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$

En $(1,\infty)$ se tiene $|2|<1$, Falso $\Rightarrow$ no lo verifica ningún x.

por tanto $A=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ $\quad$ $\sup A=\frac{1}{2}$ $\quad \nexists \max A$

$\inf A=-\frac{1}{2}$ $\quad \nexists \min A$

UNIVERSIDAD DE ALMERÍA

Facultad de: ______

Núm. ______

Grupo ______

Alumno ______

Asignatura ______

(3) $z^2 = \bar{z}$, $z = a+bi$

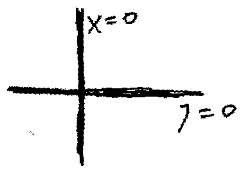
$$(a+bi)^2 = a-bi \Rightarrow a^2-b^2+2abi = a-bi \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^2-b^2=a \\ 2ab=-b \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2-a \overset{①}{=} b^2 \\ b+2ab \overset{②}{=} 0 \Rightarrow b(1+2a)=0 \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } b=0 \\ \text{Si } 1+2a=0 \end{cases} \end{cases}$$

Si $b=0$, ① $a^2-a=0 \Rightarrow a(a-1)=0 \Rightarrow \begin{array}{l} a=0 \longrightarrow (a,b)=(0,0) \\ a=1 \longrightarrow (a,b)=(1,0) \end{array}$

Si $1+2a=0$, $a=-\frac{1}{2} \overset{①}{\Rightarrow} a^2-a=b^2 \Rightarrow \frac{3}{4}=b^2 \Rightarrow b=\pm\frac{\sqrt{3}}{2} \to \begin{array}{l} (a,b)=\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ (a,b)=\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{array}$

(4)
$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{e^{xy}-1}{xy} & \text{si } xy\neq 0 \\ 1 & \text{si } xy=0 \ (\text{Si } x=0 \text{ ó } y=0) \end{cases}$$



a) Continuidad: En la región $xy\neq 0$ la función es continua, veamos en los puntos donde $xy=0$, en dichos puntos $\boxed{f(x,y)=1}$ veamos cuanto vale el límite cuando el producto $xy\to 0$ $\displaystyle\lim_{xy\to 0} f(x,y) = \lim_{xy\to 0}\frac{e^{xy}-1}{xy} =$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z} = \frac{0}{0} \overset{L'H}{=} \lim_{z\to 0} e^z = \boxed{1}$$

por tanto la función es continua en $\mathbb{R}^2$.

b) Derivadas parciales:

– En la región $xy\neq 0$ $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{e^{xy}\cdot(xy-1)+1}{x^2\cdot y}$; $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{e^{xy}\cdot(xy-1)+1}{x\cdot y^2}$

– En un punto $(a,0)$: $f_x(a,0) = \displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,0)-f(a,0)}{h} = 0$

$$f_y(a,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a,h+0)-f(a,0)}{h} = \cdots = \lim_{h\to 0}\frac{e^{ah}-1-ah}{ah^2} \overset{L'H}{=} \cdots = \frac{a}{2}$$

– En un punto $(0,b)$: Por razones de simetría $f_x(0,b)=\frac{b}{2}$, $f_y(0,b)=0$

– En punto $(0,0)$: $f_x(0,0) = \displaystyle\lim_{a\to 0} f_x(a,0) = \lim_{b\to 0} f_x(0,b) = 0$; $f_y(0,0) = \displaystyle\lim_{a\to 0} f_y(a,0) = \lim_{b\to 0} f_y(0,b) = 0$

Núm.

UNIVERSIDAD DE ALMERÍA

Facultad de:

Grupo

Alumno

Asignatura

Resumen de las derivadas parciales

$$f_x(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{xy}(xy-1)+1}{x^2y} & \text{si } xy \neq 0 \\[2ex] \dfrac{y}{2} & \text{si } xy = 0 \end{cases} \qquad xy=0 \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{y}{2} & \text{si } y \neq 0,\ x=0 \\ 0 & \text{si } y=0,\ x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0,\ y=0 \end{cases}$$

$$f_y(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{xy}(xy-1)+1}{xy^2} & \text{si } xy \neq 0 \\[2ex] \dfrac{x}{2} & \text{si } xy = 0 \end{cases} \qquad xy=0 \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{2} & \text{si } x \neq 0,\ y=0 \\ 0 & \text{si } x=0,\ y\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0,\ y=0 \end{cases}$$

Núm.

UNIVERSIDAD DE ALMERÍA

Facultad de:

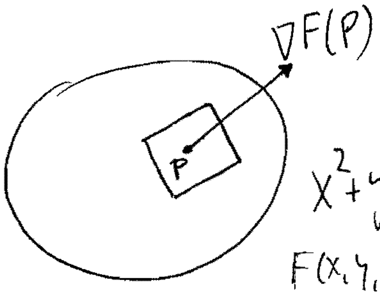
Grupo

Alumno

Asignatura

(5) a) Teoría

b)



$x^2+y^2+z^2=5^2$

$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$

$\nabla F=(F_x, F_y, F_z)=(2x, 2y, 2z)$

$\nabla F(P)=\nabla F(0,4,3)=(0,8,6)$

Ecuación del plano tg $\quad (x, y-4, z-3)\nabla F(P)=0$

$(x, y-4, z-3)(0,8,6)=0$

$8(y-4)+6(z-3)=0$

$8y+6z=50$

c) $y=x^2$

$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+z^2=1 \Rightarrow z^2=1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}$.

Si $x=t$, $y=t^2 \Rightarrow r(t)=\left(t, t^2, \sqrt{1-\frac{t^2}{4}-\frac{t^4}{16}}\right)$, $t\in[-2,2]$