
Matemáticas Agronomía. 1^{er} parcial noviembre 2016

Apellidos: _____ Nombre: _____

Mañana: ☐ Tarde ☐

1. [2] Estudie si $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ es diagonalizable. En el caso de que lo sea calcule A^{50} .
2. [2] Determine el siguiente conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : ||x| - 2| = |x| + 2\}$. Calcule su supremo, ínfimo, máximo y mínimo.
3. [2] Resuelva el siguiente sistema de números complejos

$$\left. \begin{aligned} (i-1)z + w &= -3i \\ z + (1-2i)w &= -4i \end{aligned} \right\}$$

4. a) [1] Estudie la continuidad de

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- b) [1] Calcule las derivadas direccionales de $f(x, y)$ en $(0, 0)$ según la dirección genérica $u = (\cos \theta, \sin \theta)$, $\theta \in [0, 2\pi)$.
5. a) [0.75] Deduzca a partir de las coordenadas cilíndricas de un punto cuáles son sus coordenadas esféricas.
- b) [0.5] Estudie si un cilindro es una superficie regular.
- c) [0.75] Calcule la ecuación de la recta tangente a la curva $e^{1+x^2 y} + e^{1+xy^2} = 1 + e^2$ en el punto $(1, -1)$.

Tiempo total: 2 horas.

Almería, 30 de noviembre de 2016



$$\textcircled{1} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-4)(\lambda-1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 4, \lambda_2 = 1$$

Como $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow A$ es diagonalizable.

Calculamos los vectores propios:

Para $\lambda_1 = 4$ $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -x + 2y = 0 \Rightarrow x = 2y$
 $S = \{(2t, t), t \in \mathbb{R}\}, u = (2, 1)$

Para $\lambda_2 = 1$ $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x + y = 0 \Rightarrow x = -y$
 $S = \{(\lambda, -\lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}, v = (1, -1)$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, AP = PD \Rightarrow A = PDP^{-1}$$

$$A^{50} = P \cdot D^{50} \cdot P^{-1}$$

Calculamos $P^{-1} = \dots = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

$$A^{50} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4^{50} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \dots = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 + 2 \cdot 4^{50} & -2 + 2 \cdot 4^{50} \\ -1 + 4^{50} & 2 + 4^{50} \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{2} \quad A = \{x \in \mathbb{R} : |x+2| = |x|+2\}$$

Si $x \geq 0$ $|x-2| = x+2$ $\begin{cases} x \geq 2 & x-2 = x+2 \text{ No se cumple} \\ 0 \leq x < 2 & -x+2 = x+2 \Rightarrow \boxed{x=0} \end{cases}$

Si $x < 0$ $\underbrace{|-x-2|}_{|x+2|} = -x+2$ $\begin{cases} -2 \leq x < 0 & +x+2 = -x+2 \Rightarrow \text{No se cumple} \\ x < -2 & -(x+2) = -x+2 \Rightarrow \cancel{x+2=2} \\ & -2=2 \text{ No se cumple.} \end{cases}$

Por tanto $A = \{0\}$

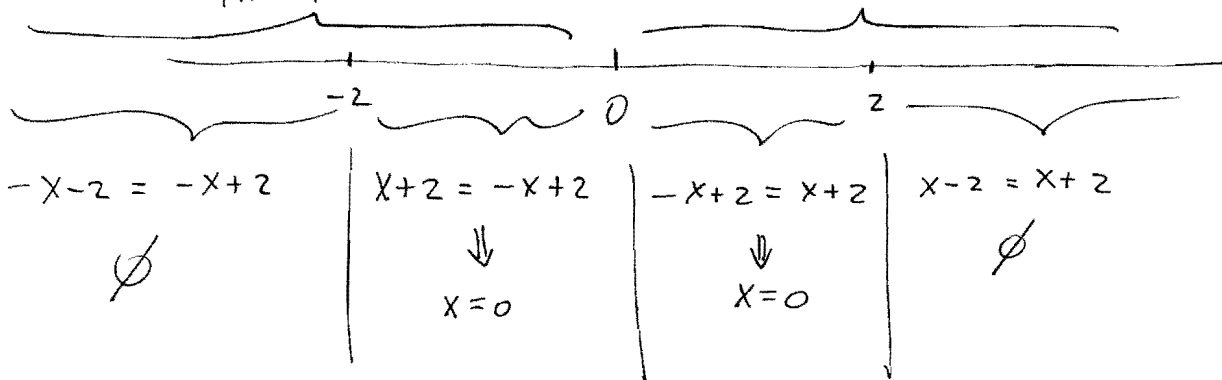
$$\sup A = \inf A = \max A = \min A = 0$$

Otra forma de verbo:

$$|-x-2| = -x+2$$

$|x+2|$

$$|x-2| = x+2$$



$$-X-2 = -X+2$$

ϕ

$$X+2 = -X+2$$

↓

$$X = 0$$

$$-x + 2 = x + 2$$

↓

$$X=0$$

$$x - 2 = x + 2$$

③

$$1^\circ (1-i)z + w = -3i$$

$$z + (1-2i)w = -4i$$

$$z = a + bi$$

$$w = c + di$$

$$1^\circ \begin{cases} (1-i)(a+bi) + c+di = -3i \\ \underbrace{(a-bi)}_{-a-bi} + \underbrace{c+di}_{c+di} = -3i \Rightarrow \begin{aligned} -b-a+c &= 0 \\ a-b+d &= -3 \end{aligned} \end{cases}$$

$$2^\circ \begin{cases} a+bi + (1-2i)(c+di) = -4i \\ \underbrace{a+bi}_{a+bi} + \underbrace{c+di}_{c+di} - \underbrace{2ci}_{2ci} + \underbrace{2d}_{2d} = -4i \Rightarrow \begin{aligned} a+c+2d &= 0 \\ b+d-2c &= -4 \end{aligned} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -b-a+c = 0 \\ a-b+d = -3 \\ a+c+2d = 0 \\ b+d-2c = -4 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -4 \end{array} \right) \sim$$

$$\begin{aligned} \bar{F}_2 + \bar{F}_1 &\rightarrow \bar{F}_2 \\ \bar{F}_3 + \bar{F}_1 &\rightarrow \bar{F}_3 \end{aligned}$$

$$\bar{F}_2 \leftrightarrow \bar{F}_1$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & -3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -11 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{11}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} \bar{F}_3 + \bar{F}_2 &\rightarrow \bar{F}_3 \\ \bar{F}_4 + 2\bar{F}_2 &\rightarrow \bar{F}_4 \end{aligned}$$

$$d = -\frac{4}{3}, c = \frac{7}{3}, b = 2, a = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{3} + 2i \\ w &= \frac{7}{3} - \frac{4}{3}i \end{aligned}$$



$$(4) \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Es cont. en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, veamos en $(0,0)$

$$\begin{aligned} \text{límites iterados: } \lim_{x \rightarrow 0} \left[\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 y}{x^2 + y^4} \right] &= 0 \\ \lim_{y \rightarrow 0} \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 y}{x^2 + y^4} \right] &= 0 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{En el caso de} \\ \text{existir el} \\ \text{límite, este} \\ \text{será } 0. \end{array} \right.$$

Veamos si el límite No existe:

$$\lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ x = uy}} \frac{(uy)^2 \cdot y}{(uy)^2 + y^4} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{u^2 \cdot y^3}{u^2 \cdot y^2 + y^4} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{u^2 \cdot y}{u^2 + y^2} = 0$$

$$\lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ x = uy^2}} \frac{(uy^2)^2 \cdot y}{(uy^2)^2 + y^4} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{u^2 y^5}{u^2 y^4 + y^4} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{uy}{u^2 + 1} = 0$$

Como no podemos asegurar nada:

Problemos la regla del sandwich: (esto es algo más complicado)

$$\left[\begin{array}{c} \frac{y^4}{1 + \frac{y^4}{x^2}} \leq \frac{\overbrace{f(x,y)}^{f(x,y)}}{1 + \frac{y^4}{x^2}} \leq \frac{y}{\underbrace{}_{\text{tiende a } 0}} \\ \parallel \quad \left[\begin{array}{c} y^3 < 1 \\ \text{para } y \text{ próximo a } 0 \end{array} \right] \\ \frac{1}{\frac{1}{y^4} + \frac{1}{x^2}} \end{array} \right] \quad \left. \begin{array}{c} \text{entonces} \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^2 + y^4} = 0 \end{array} \right\}$$

por lo tanto f es continua en $(0,0)$

Hay que aplicar la definición de derivada direccional:

$$\begin{aligned}
 4.b) \quad D_u f(0,0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((0,0) + h(\cos \theta, \sin \theta)) - f(0,0)}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h \cos \theta, h \sin \theta)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{\frac{1}{h \sin \theta} + \frac{h^3 \sin^3 \theta}{h^2 \cos^2 \theta}} = \\
 \text{como } f(x,y) &= \frac{x^2 y}{x^2 + y^4} = \frac{1}{\frac{1}{y} + \frac{y^3}{x^2}} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{\sin \theta} + h^2 \frac{\sin^3 \theta}{\cos^2 \theta}} = \sin \theta
 \end{aligned}$$

⑤ a) Teoría

b) Cilindro es una superficie regular

tomemos uno con $r=1$ y eje de revolución z

$$s(\theta, z) = (\cos \theta, \sin \theta, z), \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad z \in \mathbb{R}$$

será regular si $\exists N(\theta, z)$ para todo punto:

$$N(\theta, z) = \frac{\partial s}{\partial \theta} \times \frac{\partial s}{\partial z} = (\cos \theta, \sin \theta, 0), \quad \|N(\theta, z)\| = 1 \Rightarrow \rightarrow \text{para todo punto existe.}$$

c/ tomemos $F(x,y) = e^{1+x^2 y} + e^{1+xy^2}$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial F}{\partial x} &= 2xy e^{1+x^2 y} + y^2 e^{1+xy^2} \\
 \frac{\partial F}{\partial y} &= x^2 e^{1+x^2 y} + 2yx e^{1+xy^2}
 \end{aligned}$$

$$\nabla F(1,-1) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y} \right) \Big|_{(1,-1)} = (e^2 - 2, 1 - 2e^2)$$

recta $t_g: (x-x_0, y-y_0) \nabla F(x_0, y_0) = 0$

$$(x-1, y+1) \cdot (e^2 - 2, 1 - 2e^2) = 0 \Rightarrow y = \frac{2-e^2}{1-2e^2} x + \frac{3(e^2-1)}{1-2e^2}$$