
MATEMÁTICAS. AGRONOMÍA. Enero 2015

Apellidos y nombre:

DNI:

Grupo: Mañana ☐ Tarde ☐

1. [2] Resuelva la ecuación diferencial $y^2 y' - y = (x + 3)y' + x - 1$.
2. a) [1.5] Calcule una parametrización de la curva que se obtiene de hacer la intersección de la superficie cilíndrica de radio 1 y eje de revolución z con el plano $x + y + z = 2$.
b) [0.5] La distancia de un punto (x, y, z) al origen puede medirse con la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Calcule el punto de la curva del apartado anterior más cercano y más alejado al origen.
3. [2] Calcule la ecuación general del plano tangente y las ecuaciones paramétricas de la recta normal a la superficie $2xz + yz + 3xy = 5$ en el punto $P = (0, 1, 5)$.
4. [2] Sea el campo $F(x, y, z) = (x, 2z, y^2)$. Calcule la integral del $\text{rot}F$ a través de la semicircunferencia superior centrada en $(0, 0, 1)$ con radio 1 contenida en el plano $z = 1$ y orientada en sentido antihorario.
Nota: Recuerde la ecuación $2 \cos^2 x = 1 + \cos 2x$.
5. [2] Calcule el flujo saliente del campo $F(x, y, z) = (x^3 + 2yz, y^3 - 2xz, x^2 + y^2)$ a través del cilindro de radio 1, truncado en $z = 0$ y $z = 2$ y eje de revolución el eje z .

Nota: Tiempo máximo de realización: 2.30h.

La puntuación de los ejercicios se indica entre corchetes al lado de su número

Advertencia: No está permitido manejar el móvil durante el examen, será motivo de expulsión quien tenga el móvil a la vista, aunque no lo esté utilizando.

Almería, 23 de enero de 2015



$$\textcircled{1} \quad y^2 y' - y = (x+3)y' + x - 1 \Rightarrow y' = \frac{x+y+1}{y^2-x-3} \Rightarrow$$

$$\underbrace{(x+y+1)}_M dx + \underbrace{(x+3-y^2)}_N dy = 0$$

Veamos que es una ED exacta:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 1 \text{ entonces es exacta.}$$

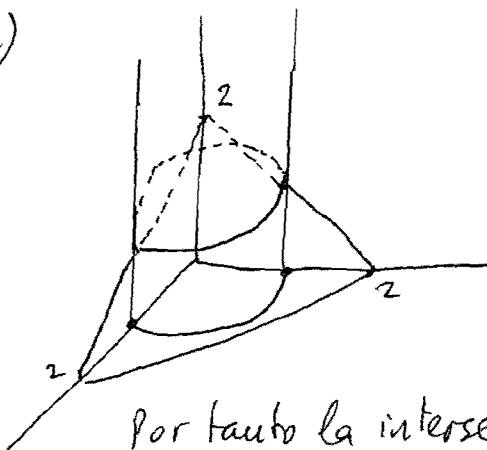
La resolvemos: la solución será una función $f(x,y) = C$ se obtiene de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} K &= \int_{x_0}^x (x+y+1) dx + \int_{y_0}^y (x_0+3-y^2) dy = \\ &= \left[\frac{x^2}{2} + xy + x \right]_{x_0}^x + \left[x_0 y + 3y - \frac{y^3}{3} \right]_{y_0}^y = \\ &= \frac{x^2}{2} + xy + x - \left(\frac{x_0^2}{2} + x_0 y + x_0 \right) + x_0 y + 3y - \frac{y^3}{3} - \left(x_0 y_0 + 3y_0 - \frac{y_0^3}{3} \right) = \\ &= \underbrace{\frac{x^2}{2} + xy + x + 3y - \frac{y^3}{3}}_{f(x,y)} - \underbrace{\left(\frac{x_0^2}{2} + x_0 - x_0 y_0 + 3y_0 - \frac{y_0^3}{3} \right)}_{cte} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x,y) = \frac{x^2}{2} + xy + x + 3y - \frac{y^3}{3} = C$$

② plano $x+y+z=2 \Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 1$

a)



cilindro: $\begin{cases} x = \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases}$

$S(\theta, z) = (\cos \theta, \sin \theta, z), \theta \in [0, 2\pi], z \in \mathbb{R}$

Plano:

$z = 2 - x - y$

Por tanto la intersección es

$r(\theta) = S(\theta, z) = (\cos \theta, \sin \theta, 2 - x - y) \Rightarrow$

↑
plano

↑
sustituir $x = \cos \theta$
 $y = \sin \theta$

$r(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta, 2 - \cos \theta - \sin \theta), \theta \in [0, 2\pi]$

b) la función distancia es $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

como $(x, y, z) \in r(\theta)$ sustituimos las coordenadas de la curva

$f(\theta) = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta + (2 - \cos \theta - \sin \theta)^2 \Rightarrow$

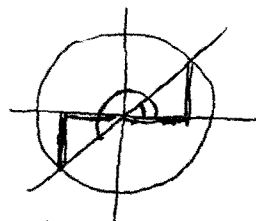
$f(\theta) = 1 + (2 - \cos \theta - \sin \theta)^2$

calculamos su máximo y su mínimo:

$f'(\theta) = 2(2 - \cos \theta - \sin \theta)(\sin \theta - \cos \theta) = 0$

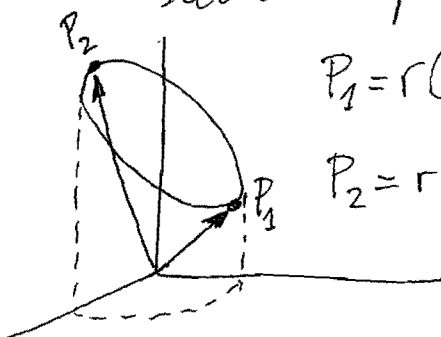
$\Rightarrow \sin \theta = \cos \theta, \theta \in [0, 2\pi]$

Solo se cumple para $\theta_1 = \frac{\pi}{4}, \theta_2 = \frac{5\pi}{4}$



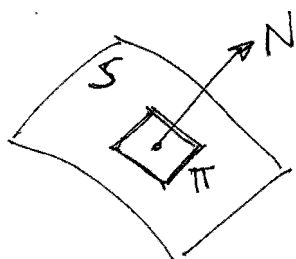
$P_1 = r(\theta_1) = (\cos \frac{\pi}{4}, \sin \frac{\pi}{4}, 2 - \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4}) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 2 - \sqrt{2})$

$P_2 = r(\theta_2) = (\cos \frac{5\pi}{4}, \sin \frac{5\pi}{4}, 2 - \cos \frac{5\pi}{4} - \sin \frac{5\pi}{4}) = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 2 + \sqrt{2})$





(3)



$$S \equiv 2xz + yz + 3xy = 5$$

S es la superficie de nivel 5 de la función $F(x,y,z) = 2xz + yz + 3xy$

utilizando las aplicaciones del gradiente:

∇F es ortogonal a la superficie

$\nabla F = (2z + 3y, z + 3x, 2x + y)$, que en el punto $P = (0, 1, 5)$

obtenemos $\nabla F(0, 1, 5) = (13, 5, 1)$ por tanto

ecuación normal del plano tangente es

$$(x-0, y-1, z-5) \cdot \nabla F(P) = 0 \Rightarrow (x, y-1, z-5) \cdot (13, 5, 1) = 0$$

$$\Rightarrow 13x + 5y + z = 10 \text{ ec. general.}$$

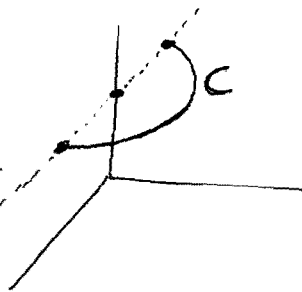
Las ecuaciones paramétricas de la recta normal es:

$$\begin{cases} x = 0 + 13\alpha. \\ y = 1 + 5\alpha. \\ z = 5 + \alpha. \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

(4)

$$F(x, y, z) = (x, 2z, y^2).$$

$$\int_C \text{rot } F \, dr = \int_a^b \text{rot } F(r(\theta)) \cdot r'(\theta) \, d\theta,$$



parametizamos la curva

$$r(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta, 1), \quad \theta \in [0, \pi]$$

$$\text{entonces } r'(\theta) = (-\sin \theta, \cos \theta, 0).$$

Calculamos el $\text{rot } F$

$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & 2z & y^2 \end{vmatrix} = (2y - 2, 0, 0)$$

$$\text{entonces } \text{rot } F(r(\theta)) = \text{rot } F(\cos \theta, \sin \theta, 1) = (2\sin \theta - 2, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \text{rot } F(r(\theta)) r'(\theta) = (2\sin \theta - 2, 0, 0) \cdot (-\sin \theta, \cos \theta, 0) =$$

$$= \cancel{\frac{1}{2}} - 2\sin^2 \theta + 2\sin \theta \cancel{\cos \theta}, \quad \theta \in [0, \pi]$$

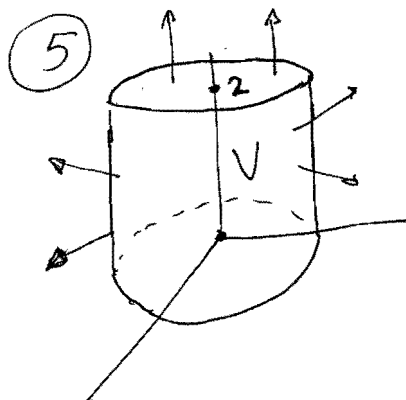
por tanto tenemos

$$\int_0^\pi -2\sin^2 \theta + 2\sin \theta \, d\theta = \int_0^\pi -2\sin^2 \theta \, d\theta + \underbrace{\int_0^\pi 2\sin \theta \, d\theta}_0$$

$$2\sin^2 \theta = 1 - \cos 2\theta$$

$$= \int_0^\pi -(1 - \cos 2\theta) \, d\theta = \int_0^\pi -1 \, d\theta + \frac{1}{2} \int_0^\pi 2 \cos 2\theta \, d\theta =$$

$$= -\pi + \frac{1}{2} \left(\sin 2\theta \right)_0^\pi = -\pi$$



tenemos un volumen cuya frontera es el cilindro truncado que es una superficie cerrada

$\partial V = S \text{ cerrada} \Rightarrow$ Aplicamos el teorema de Gauss

$$\oint_{\partial V = S \text{ cerrada}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F} \, dx \, dy \, dz \quad *$$

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 3x^2 + 3y^2 = 3(x^2 + y^2)$$

$$* = 3 \iiint_V x^2 + y^2 \, dx \, dy \, dz = 3 \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta) \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{jacobiano}}}{r} \, dr \, d\theta \, dz$$

Coordenadas cilíndricas de V que es un sólido

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad \begin{cases} \theta \in [0, 2\pi] \\ z \in [0, 2] \end{cases}$$

$$= 3 \cdot \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 \, dr \, d\theta \, dz = \frac{3}{4} \int_0^2 \int_0^{2\pi} d\theta \, dz = \underline{\underline{3\pi}}$$